$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{f(u_k)}{u_k} \end{cases}$$

Ainsi $(\omega M_k) : y = \dfrac{f(u_k)}{u_k}x \Leftrightarrow (\omega M_k) : f(u_k)x - u_k y = 0$

Par suite $M_{k+1}H = d[M_{k+1};(\omega M_k)] = \dfrac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{\sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}}$.

D'où $s_k = \dfrac{\omega M_k \times M_{k+1}H}{2} = \dfrac{\sqrt{u_k^2+[f(u_k)]^2} \times \dfrac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{\sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}}}{2}$

$= \dfrac{|f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1})|}{2}$.

Or $f(u_k)u_{k+1} - u_k f(u_{k+1}) = u_{k+1}[u_k \text{Log}(u_k) - u_k] - u_k[u_{k+1}\text{Log}(u_{k+1}) - u_{k+1}]$

$= u_{k+1}u_k[\text{Log}(u_k) - \text{Log}(u_{k+1})]$

$= e^{-k}e^{-k+1}\text{Log}\left[\dfrac{e^{-k+1}}{e^{-k}}\right] = e^{-2k+1}\text{Log}e = e^{-2k+1} > 0$

Enfin $s_k = \dfrac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$.

D'après le travail précédent $s_k = \dfrac{1}{2}e^{-2k+1}$.

c- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} s_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{1}{2}e^{-2k+1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{1}{2}e(e^{-2})^k$

$= \dfrac{1}{2}e\sum_{k=0}^{k=n-1}(e^{-2})^k = \dfrac{1}{2}e.\dfrac{1-(e^{-2})^n}{1-(e^{-2})}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}e.\dfrac{1-(e^{-2})^n}{1-(e^{-2})}\right] = \dfrac{1}{2}e.\dfrac{1}{1-(e^{-2})}$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-2})^n = 0$ puisque $e^{-2} \in]-1,1[$)